XCC を表現する ZMDD 上での探索

松本 吏司　原田 崇司

高知工科大学大学院 工学研究科

2026 年 1 月 14 日

研究背景

- 色付き厳密被覆問題は，幅広い問題を比較的簡単に扱える
- 現実の問題を定式化すると，インスタンスが巨大化するものが存在
- Nishino らがインスタンスを圧縮し，その表現上で探索を行う厳密被覆問題に対するアルゴリズム (D^3X) を提案 (2021)

D^3X を拡張し，色付き厳密被覆問題へ対応させた手法を提案したが，変数の数が巨大になる問題が存在

ZMDD を用いることで変数の数を抑制

研究背景

へ	み	ら	む	か	な
の	ま	な	ろ	わ	す
ま	つ	も	と	は	け
て	お	め	だ	ら	は

へ	み	ら	む	か	な
の	ま	な	ろ	わ	す
ま	つ	も	と	は	け
て	お	め	だ	ら	は

図 1: ワードサーチの作問

色付き厳密被覆問題で扱える問題の例

- スケジューリング
- グラフ彩色
- $s-t$ パス列挙

厳密被覆問題

厳密被覆問題 (Exact Cover, XC)

入力：集合 U と U の冪集合の部分集合 $\mathcal{F}$
出力：U の分割となる $\mathcal{F}$ の部分集合

集合 U の要素をアイテム，集合 $\mathcal{F}$ の要素をオプションと呼称
各アイテムを丁度一度被覆するオプションの組合せを求める問題

$$U = \{a, b, c, d\},$$
$$\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a, c, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{d\}\}.$$

$\{a\}, \{b, c\}, \{d\}$ の組合せが解
$\{a, c, d\}, \{b, c\}$ の組合せは c が重複するため解でない

色付き厳密被覆問題

色付き厳密被覆問題 (Exact Covering with Colors, XCC)

アイテム集合 U をプライマリアイテムの集合 U_p と，セカンダリアイテムの集合 U_s に分割
セカンダリアイテムには，新たな属性として色を付与

XCC は XC を拡張した問題であり，Knuth によって提案

各アイテムの制約

プライマリアイテム：丁度一度被覆しなければならない
セカンダリアイテム：高々一度被覆してよい
ただし，同じ色がつけられている場合は重複して被覆してよい

XCC の例

セカンダリアイテム s に色 c が付いていることを $s\!:\!c$ と表現

$$
\begin{aligned}
U_p &= \{p, q, r\},\ U_s = \{x, y\}, \\
\mathcal{F} &= \{\{p, q, x, y\!:\!A\}, \{p, r, x\!:\!A, y\}, \\
&\qquad \{p, x\!:\!B\}, \{q, x\!:\!A\}, \{r, y\!:\!B\}\}.
\end{aligned}
$$

$\{p, r, x\!:\!A, y\}, \{q, x\!:\!A\}$ の組合せが解

$\{p, q, x, y\!:\!A\}, \{r, y\!:\!B\}$ の組合せは y に付けられた色が異なるため解でない

Algorithm X

XC を解くバックトラックアルゴリズム

オプションを選択し，競合する他のオプションを削除

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
\xrightarrow{1\text{を選択}}
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc} b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
\xrightarrow{3\text{を選択}}
\begin{array}{cc}
 & d \\
5 & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow{2\text{を選択}}
\begin{array}{cc}
 & b \\
- & \begin{pmatrix} - \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Algorithm C (XCC への拡張)

同じ色のセカンダリアイテムを持つオプションは削除しない

アイテムの被覆状態の確認はプライマリアイテムに限定

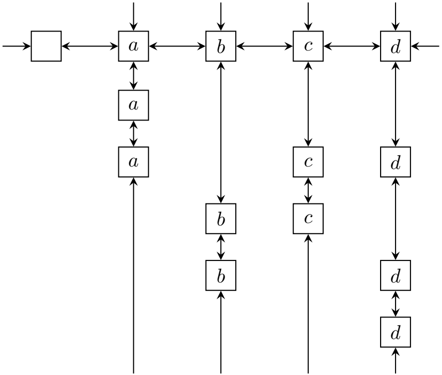
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} p & q & r & x & y \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & A \\
1 & 0 & 1 & A & 1 \\
1 & 0 & 0 & B & 0 \\
0 & 1 & 0 & A & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & B
\end{pmatrix}
\end{array}
\xrightarrow{1\text{を選択}}
\begin{array}{c c}
 & r \\
- & \begin{pmatrix} - \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow{4\text{を選択}}
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} p & r & y \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & B
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Dancing Links [Knuth (2000)][1]

- 双方向リンクを持つノードによって構成されるデータ構造
- ノードの削除・復元を，リンクの付替えによって高速に処理
- 疎なインスタンスに対して省メモリ

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



[1]Donald E. Knuth (2000), Dancing Links, Millennial Perspectives in Computer Science, pages 187–214

巨大なインスタンス

- 巨大なインスタンスは，入力を行うこと自体が困難
- 実行時間も大幅に増加

Nishino らはインスタンスを ZDD を用いて圧縮し，その表現上で探索を行う手法を提案

インスタンスの圧縮

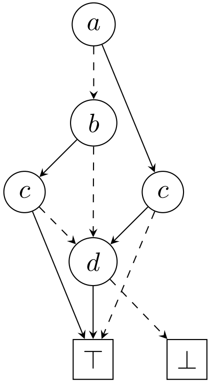
Zero-suppressed Binary Decision Diagram, ZDD

組合せ集合を簡潔に表現できるデータ構造

0 枝，1 枝の子を持つ非終端節点と，0-終端節点，1-終端節点から構成

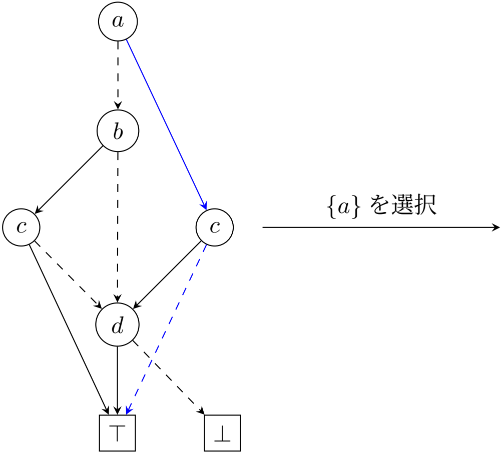
$$U = \{a, b, c, d\},$$

$$\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a, c, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{d\}\}$$



アルゴリズム D^{3}X [Nishino et al. (2021)][2]

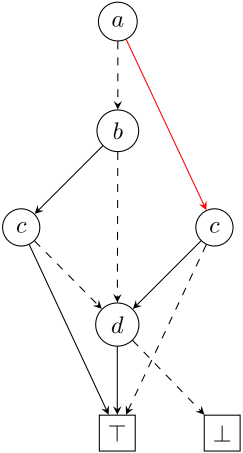
D^{3}X は ZDD 上で探索を行うバックトラックアルゴリズム



[2] Nishino et al. (2021), Compressing Exact Cover Problems with Zero-suppressed Binary Decision Diagrams, IJCAI 2021, pages 1996–2004

アルゴリズム D^{3}X [Nishino et al. (2021)][2]

D^{3}X は ZDD 上で探索を行うバックトラックアルゴリズム

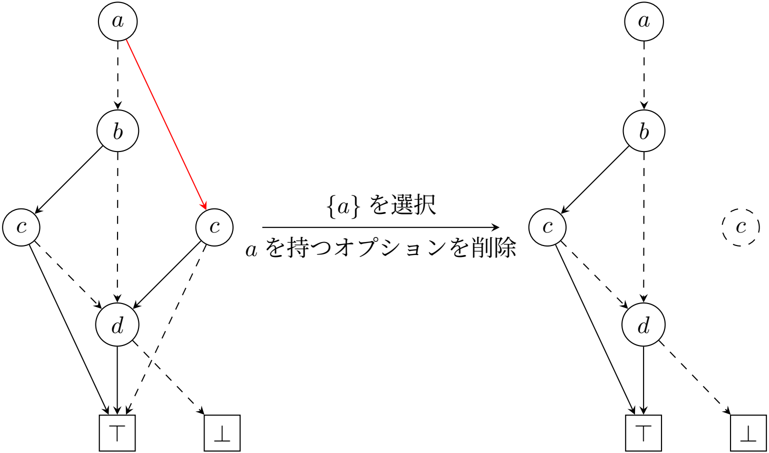


$$\xrightarrow[a\text{ を持つオプションを削除}]{\{a\}\text{ を選択}}$$

[2]Nishino et al. (2021), Compressing Exact Cover Problems with Zero-suppressed Binary Decision Diagrams, IJCAI 2021, pages 1996–2004

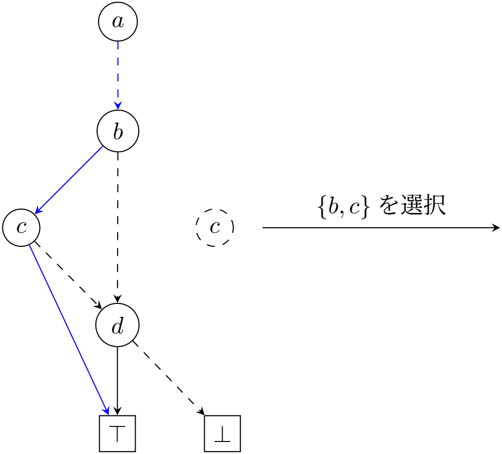
アルゴリズム D^{3}X [Nishino et al. (2021)][2]

D^{3}X は ZDD 上で探索を行うバックトラックアルゴリズム

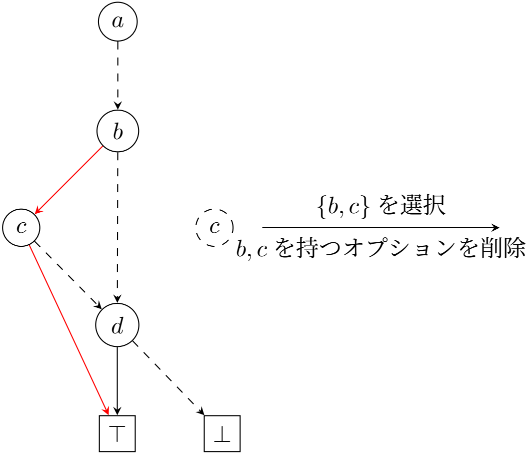


[2] Nishino et al. (2021), Compressing Exact Cover Problems with Zero-suppressed Binary Decision Diagrams, IJCAI 2021, pages 1996–2004

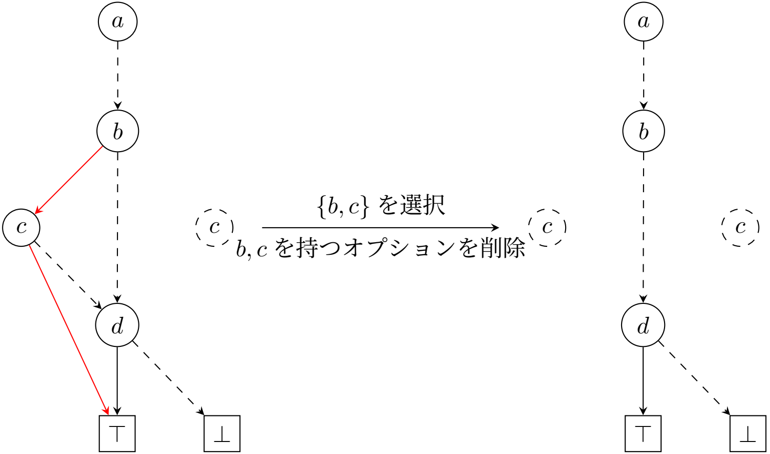
アルゴリズム D^{3}X Nishino et al.



アルゴリズム D^{3}X Nishino et al.

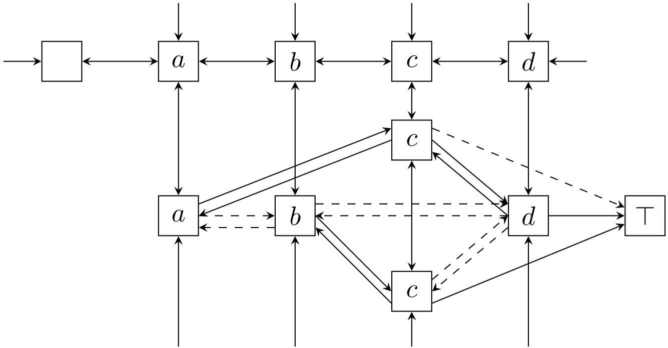


アルゴリズム D^{3}X Nishino et al.



DanceDD Nishino et al.

Dancing Links のオプションに対応する部分を ZDD で表現したデータ構造
巨大な入力に対しても効率よく処理

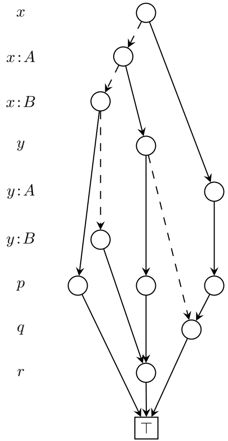


D^3X の XCC への拡張 [松本ら (2025)][3]

各セカンダリアイテムの色ごとに異なる変数を用意し，ZDD で表現

$$U_p = \{p, q, r\},\ U_s = \{x, y\},$$
$$\mathcal{F} = \{\{p, q, x, y{:}A\}, \{p, r, x{:}A, y\}, \{p, x{:}B\}, \{q, x{:}A\}, \{r, y{:}B\}\}$$

セカンダリアイテムの色数が多い場合，変数の数が巨大になる

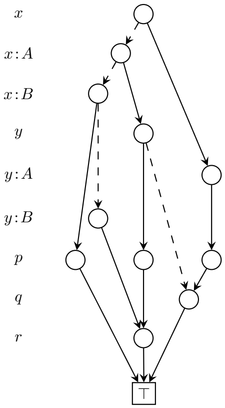


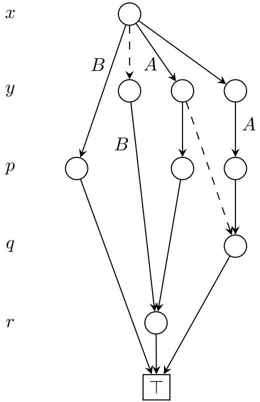
[3] 松本，原田 (2025)，DanceDD-C を用いた XCC に対するアルゴリズム，FPAI-131-01

インスタンスの圧縮

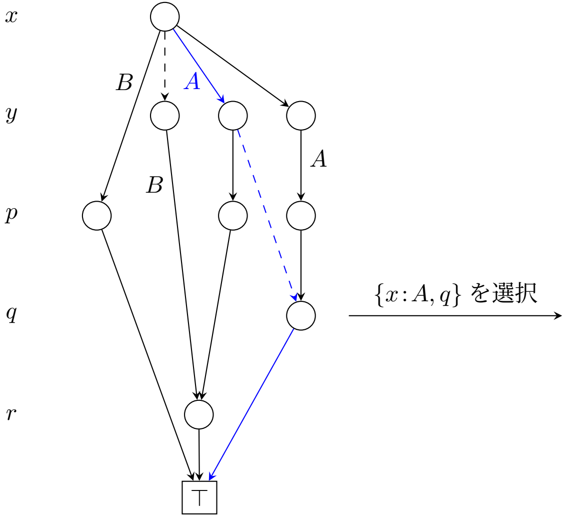
Zero-suppresed Multi-valued Decision Diagram, ZMDD

ZDD と同様の規則を適用した多値決定グラフ
アイテムの各色を各枝に対応させ，インスタンスを表現

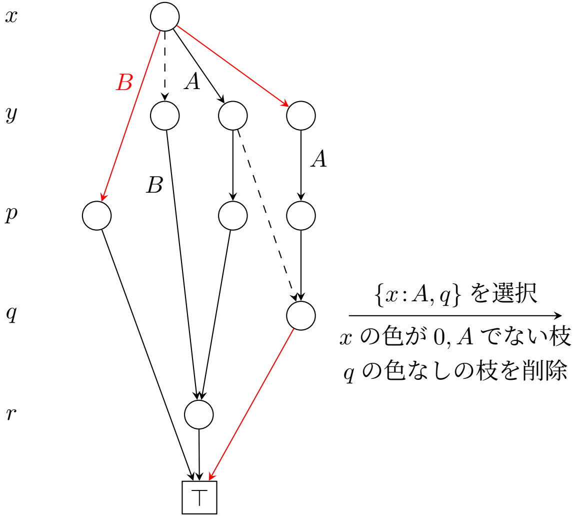




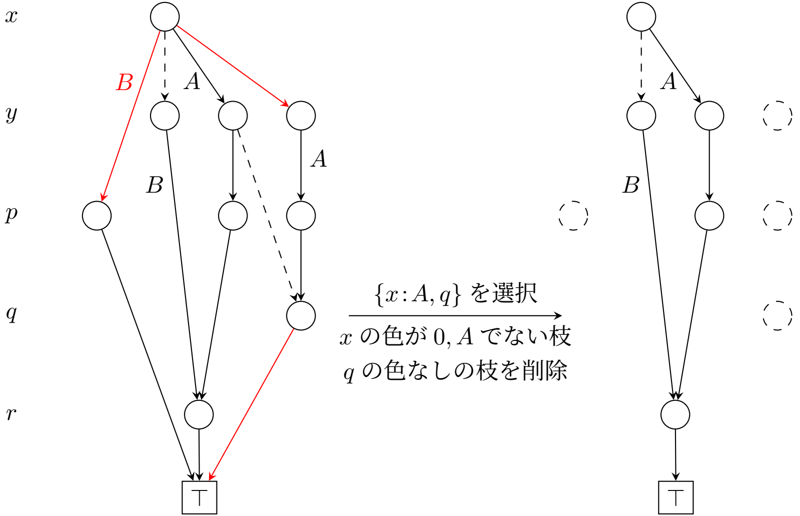
ZMDD 上での探索 (1/3)



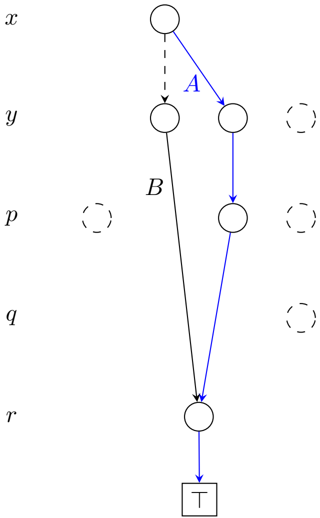
ZMDD 上での探索 (1/3)



ZMDD 上での探索 (1/3)

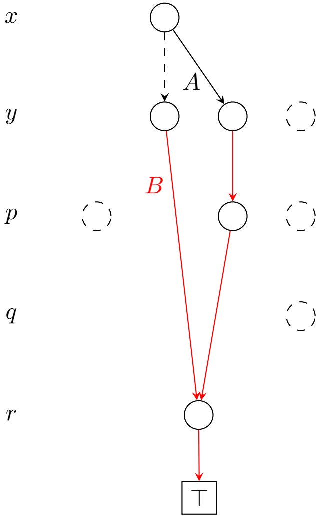


ZMDD 上での探索 (2/3)



$\{x\!:\!A, y, p, r\}$ を選択 $\longrightarrow$

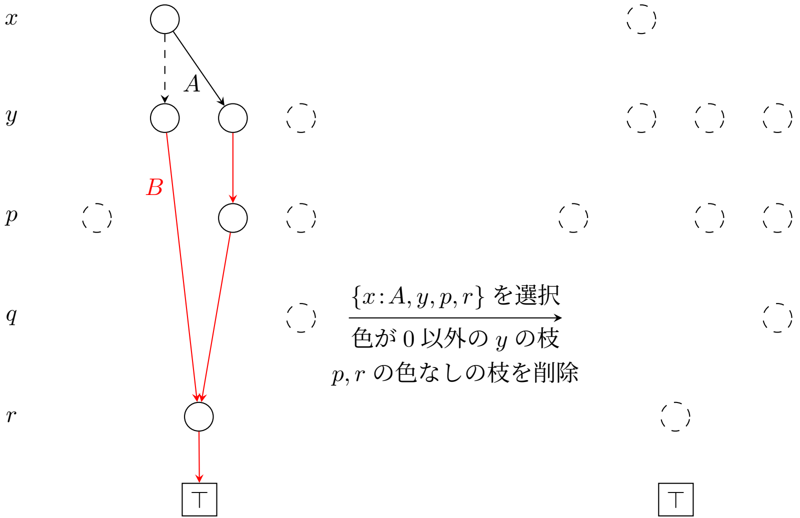
ZMDD 上での探索 (2/3)



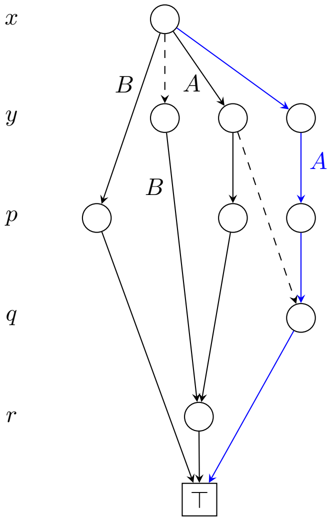
$\{x\!:\!A, y, p, r\}$ を選択

色が 0 以外の y の枝
p, r の色なしの枝を削除

ZMDD 上での探索 (2/3)

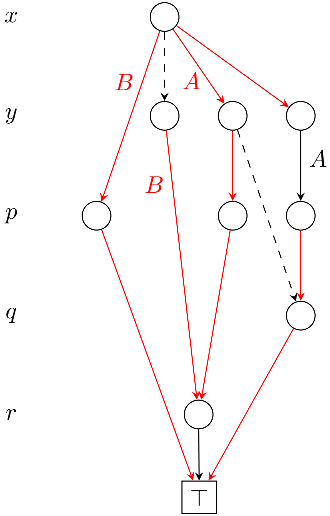


ZMDD 上での探索 (3/3)



$\{x, y\colon A, p, q\}$ を選択

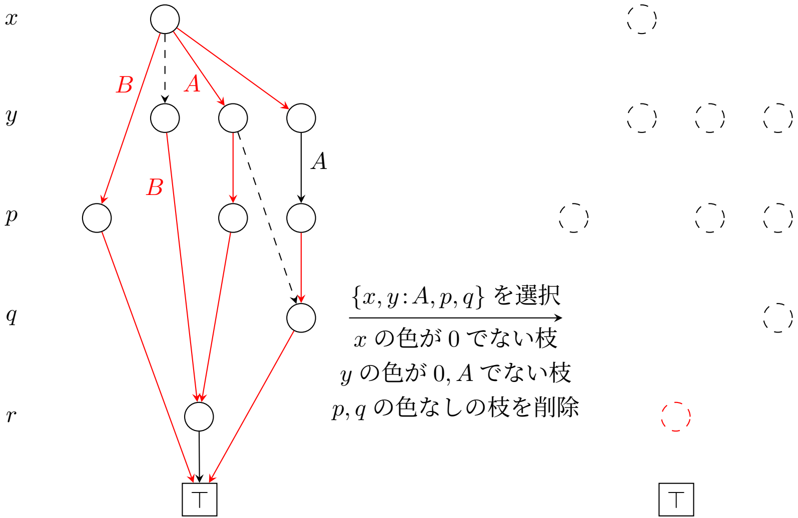
ZMDD 上での探索 (3/3)



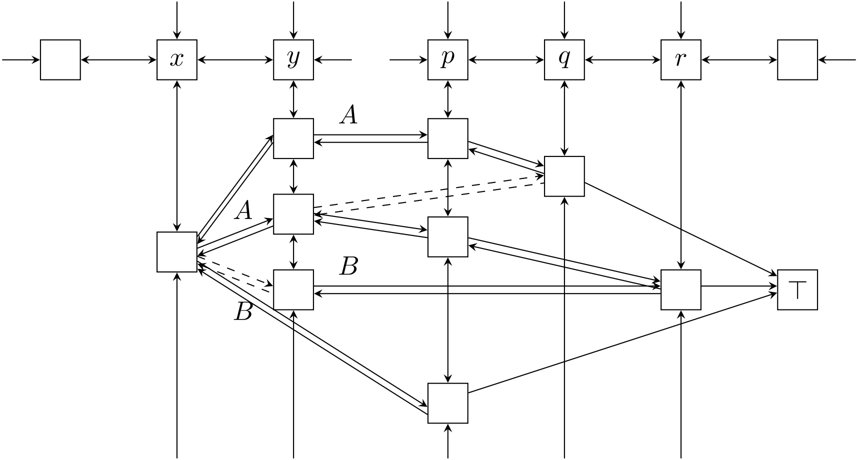
$\{x, y\colon A, p, q\}$ を選択 $\longrightarrow$

x の色が 0 でない枝
y の色が $0, A$ でない枝
p, q の色なしの枝を削除

ZMDD 上での探索 (3/3)



データ構造



各データ構造のサイズ比較

	オプション数	$\lvert U_P \rvert$	$\lvert U_S \rvert$	|DLX|	ZDD (var)	|ZDD|	ZMDD (var)	|ZMDD|
A	18486	30	110	384871	250	15262	140	**13032**
C	4320	30	61	34560	–	–	91	**11495**
D	2327	77	1	13988	–	–	78	**9558**
E	2536	54	14	9974	250	8411	68	**4017**
F	7800	81	594	131830	–	–	675	**125943**
G	576	48	506	3613	–	–	554	4989
H	1416	196	93	10176	–	–	289	13004
I	20088	81	72	200880	–	–	153	**98861**
K	343	49	288	1697	–	–	337	2706
M	1514	49	42	7578	217	6245	91	**4901**
N	5546	17	668	347810	–	–	685	419469
P	14179	200	100	113432	–	–	300	**92531**
Q	256	32	58	1020	–	–	90	1421
R	121	11	741	1801	–	–	752	3370
S	3858	342	90	26617	1008	19827	432	19827
T	2658	29	338	19741	–	–	367	28049
V	22000	9	20	122000	517	58293	29	**32367**
W	1212	12	36	5724	513	6825	48	6243
Y	1309	225	312	7154	–	–	537	9954
Z	1104	24	24	3312	576	4072	48	**2234**

まとめと今後の課題

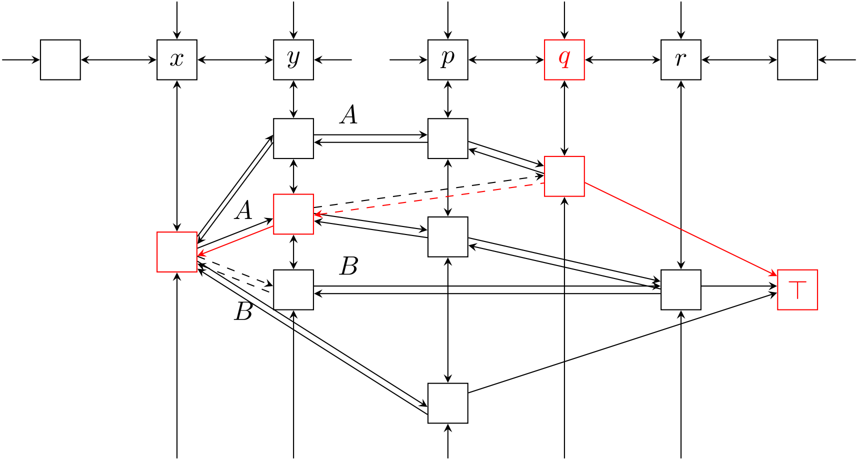
まとめ

- XCC インスタンスの表現に ZMDD を用い，その上で探索を行う手法を提案
- 変数の数をアイテム数に抑制

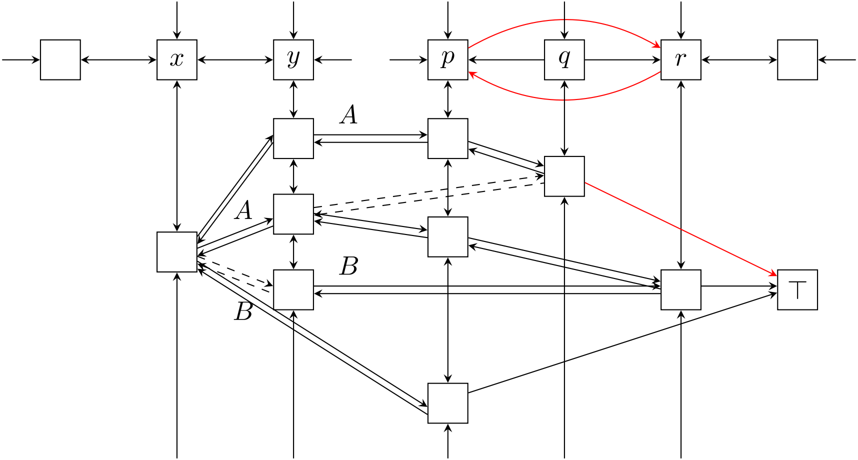
今後の課題

- 提案手法の高速な実装
- ZMDD の変数順序の変更
- MCC (Covering with Multiplicities and Colors) への拡張
- SDD, ZSDD 等のデータ構造の検討

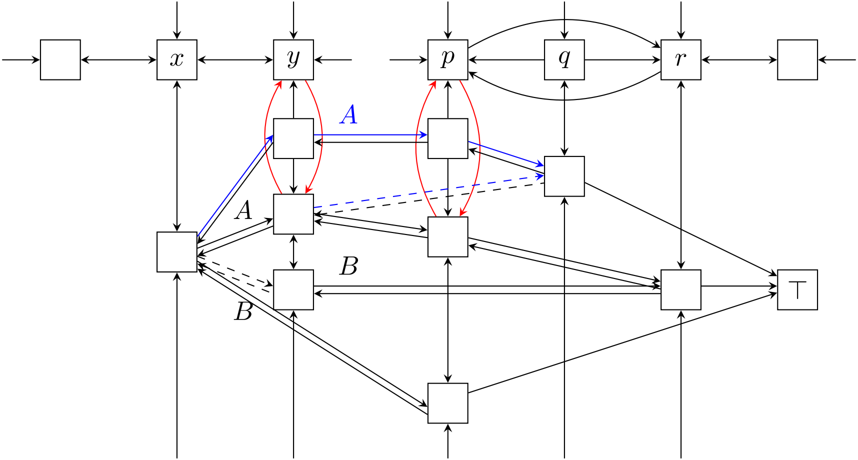
探索例



探索例



探索例



探索例